et $\left(g^{-1}\right)'(\ln 3)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 12

1)a) $g(x)=x\ln^2 x-1,\ x\in\ ]0,+\infty[$.

$g'(x)=\ln^2 x+x.2.\dfrac{1}{x}.\ln x$

$=\ln^2 x+2\ln x.$

$=\ln x(\ln x+2).$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0$ ou $\ln x=-2$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$g(x)$	‖ -1	↗	$\frac{4}{e^2}-1$	↘	-1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln^2 x-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x\ln^2 x}_{0}-1=-1$

$g\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{1}{e^2}\ln^2\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-1=\dfrac{4}{e^2}-1$

b) g est continue et strictement croissante sur $]2,3[$.

$g(2)=2\ln^2 2-1\ \square\ -0,04<0$

$g(3)=3\ln^2 3-1\ \square\ 2,62>0$

$g(2)\times g(3)<0.$

$\Rightarrow$ L'équation $g(x)=0$ admet une unique Solution $\alpha\in\ ]2,3[$.

c) Signe de g

x	0		α		$+\infty$
g(x)	‖	−	0	+	

2)a) $Df=[0,+\infty[\setminus\{1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x+\dfrac{1}{\ln x}$

$=0=f(0).$

$\Rightarrow$ f est continue à droite en 0.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x\ln x+1}{\ln x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x+1}{x\ln x}=-\infty.$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0.

d) f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et

$f'(x)=\left(x+\dfrac{1}{\ln x}\right)'$

$=1-\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=1-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

$=\dfrac{x\ln x^2-1}{x\ln^2 x}=\dfrac{g(x)}{x\ln^2 x}$

Le signe de f'(x) est celui de g(x).

Tableau de variation :

x	0		1		α		$+\infty$
f'(x)	‖ −		‖	−	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	‖ $-\infty$ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{\ln x}$

$=+\infty+\dfrac{1}{+\infty}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x+\dfrac{1}{\ln x}=1+\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+\dfrac{1}{\ln x}=1+\dfrac{1}{0^-}-\infty$

e) $f(\alpha)=\dfrac{\alpha\ln\alpha+1}{\ln\alpha}$

Or $g(\alpha)=\alpha\ln^2\alpha-1=0$

$\Rightarrow \alpha\ln^2\alpha=1$

Qarray.tn-Aqra Blech-Qarray.tn